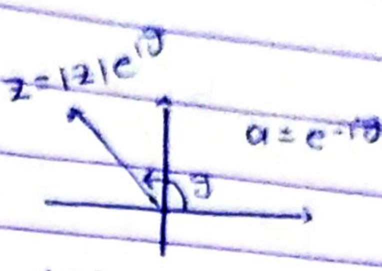
$$\left|\int_a^b g(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |g(x)|\,dx$$

$\boxed{27/11/17}$

Απόδ.:

$$z = \int_a^b g(x)\,dx \in \mathbb{C}$$



$\exists a \in \mathbb{C}, \ |a| = 1 : az = |z| \quad (1)$

$$az = a\int_a^b g(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b a g(x)\,dx = |z|}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b (\operatorname{Im} a g(x))\,dx = 0 \quad (2)$$

$\overset{ag}{\overset{\shortparallel}{f}} = \operatorname{Re} f + i \cdot \operatorname{Im} f$

$\int f = \int \operatorname{Re} f + i \cdot \int \operatorname{Im} f$

$a+bi$

$|a| \leq |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

$u(x) = \operatorname{Re} a g(x)$

$u(x) \leq |u(x)| \leq |a g(x)| = |g(x)| \quad (3)$

$$|z| = \left|\int_a^b a g(x)\,dx\right| \overset{(1)}{=} a \cdot \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b a g(x)\,dx$$

$$\overset{(2)}{\leq} \int_a^b u(x)\,dx$$

$$\overset{(3)}{\leq} \int_a^b |g(x)|\,dx$$

■

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$ 3.8:

$\{f_k\}_{k=1,2,\dots} \in R(\pi)$, $f \in R(\pi)$

$$\int_0^{2\pi} |f_k(t) - f(t)|\, dt \to 0$$

N.δ.ο. $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$, $k \to \infty$ ομοιομ. ως προς n

ΛΥΣΗ:

Θ.ν.δ.ο. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 : |\hat{f}_k(n) - \hat{f}(n)| < \varepsilon$, $k \geq k_0$, για $n \in \mathbb{R}$

$$|\hat{f}_k(n) - \hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(x) e^{-ikx}\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (f_k(x) - f(x)) e^{-inx}\, dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_k(x) - f(x)|\, dx \to 0$$

■

§2. Τριγωνομ. σειρές - Απόλυτη σύγκλιση

• ΟΡΙΣΜΟΣ: Τριγωνομετρική σειρά λέγεται μία σειρά της μορφής $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, $a_n \in \mathbb{C}$

Παρατηρήσεις: (1) $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{inx}$ δεν είναι σειρά Fourier, είναι όμως τριγωνομετρική (διότι $a_n = 1 \not\to 0$)

(2) $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{C} \overset{\text{ορ.}}{\iff} \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} a_n = s$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$ τότε

i) $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} = f(x) \in \mathbb{T}$

ii) $\hat{f}(n) = a_n$

ΑΠΟΔ.:

i) Κριτ. Weirstrass

$\left(S_n(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx} \text{ συνεχής } \forall N \right)$

ii) $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\lim_{N\to\infty} S_N(x) \right) e^{-ikx} dx$

$$\underset{\substack{\text{ομοιόμ.} \\ \text{σύγκλ.}}}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} S_N(x) e^{-ikx} dx$$

$S_N(x) \to \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=-N}^{N} a_n \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-i(n-k)x} dx}_{\text{Για } n \neq k \text{ το ολοκλ. είναι } 0}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot a_k \cdot 2\pi = a_k$$

Παρατήρηση: $f \in R(\mathbb{T})$

$\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty \xRightarrow{\text{Θεώρ.}} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} = g(x) \in C(\mathbb{T})$

κ. $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$

Θ.δ.ο. $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού

($f(x) \neq g(x)$ για πεπερασμένα σημεία κ. αριθμήσιμα σημεία ή μέτρου μηδέν σημεία)

$f \equiv g$

• $S \subseteq \mathbb{R}$

S λέγεται μέτρου μηδέν αν-ν

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists I_n(a_n, b_n)$ ακολουθία ανοικτών διαστημάτων

$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ κ. $\sum_{1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$, $|I_n| = b_n - a_n$

§3. Πράξεις μεταξύ συνόλων κ. σειρές Fourier

$R(\mathbb{T})$

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$$

$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$$

πλήρης $\overline{R(\mathbb{T})} = L(\mathbb{T})$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

$C(\mathbb{T})$, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(t)|$ πλήρης

$C(\mathbb{Z}) = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \to 0,\ n \to \pm\infty \}$, $\|a_n\| = \sup_{y \in R} |a_n|$

πλήρης

Τελεστής Fourier

$\mathcal{F} : R(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{Z})$

$f \longmapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$

$\mathcal{F}$ είναι γραμμικός, δηλ. $(\widehat{f+g})(x) = \hat{f}(x) + \hat{g}(x)$

$(\widehat{af})(x) = a\hat{f}(x)$

i) Τελεστές Μετατοπίσης:

$a \in \mathbb{R}$

$\tau_a : R(\mathbb{T}) \to R(\mathbb{T})$ $\qquad \tau_a f(x) = f(x-a)$

Ισχύει: $\widehat{\tau_a f}(x) = e^{-ina} \hat{f}(n)$

Αποδ.:

$$\widehat{\tau_a f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-a) e^{-inx} dx$$

$x - a = u$

$dx = du$

$x = 0 \to u = -a$

$x = 2\pi \to u = 2\pi - a$

άρα $$\widehat{\tau_a f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{-a+2\pi} f(u) \cdot \underbrace{e^{-in(u+a)}}_{e^{-inu} e^{-ina}} du$$

$$= e^{-ina} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-inu} du}_{\hat{f}(n)}$$

HW: $\tau_k : C(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{Z})$, $\qquad \tau_k((a_n)) = (a_{n-k})_n$

$m_k : R(\mathbb{T}) \to R(\mathbb{T})$, $\qquad m_k f(x) = e^{-ikx} f(x)$

πολ/στης

$A : R(\mathbb{T}) \to R(\mathbb{T})$, $\qquad Af(x) = f(-x)$

τελεστής ανάκλασης

$A_0 : C_0(\mathbb{Z}) \to C_0(\mathbb{Z})$, $\qquad A_0((a_n)) = (a_{-n})$

Τελεστής Συζυγίας

$C : R(\mathbb{T}) \to R(\mathbb{T})$, $\qquad Cf(x) = \overline{f(x)}$

$C_0 : C(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{Z})$, $\qquad C((a_n)) = (\bar{a}_n)_n$

Ν.δ.ο.: i) $\mathcal{F} \circ m_k = \tau_{-k} \circ \mathcal{F}$, ii) $\mathcal{F} \circ A = A_0 \circ \mathcal{F}$,

iii) $\mathcal{F} \circ C = C_0 \circ A_0 \circ \mathcal{F}$

Να γίνουν τα μεταθετικά διαγράμματα που εκφράζουν οι ισότητες

ΑΣΚΗΣΗ 3.15 :

$f \in R(\pi)$

$g(x) = f(\kappa x)$, $\kappa \in \mathbb{N}$ (συστολή)

i) Να βρείτε την ελάχιστη περίοδο της $g(x)$

↳ Έστω T περίοδος

$g(x) = g(x+T) \Leftrightarrow f(\kappa x) = f(\kappa(x+T))$

$\Leftrightarrow f(\kappa x) = f(\kappa x + \kappa T)$

$\Leftrightarrow \kappa T = 2\pi l$

$\Leftrightarrow T = \frac{2\pi l}{\kappa} \xrightarrow{l=1} T_0 = \frac{2\pi}{\kappa}$

$(l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

ii) Ποια σχέση συνδέει τα ολοκλ. της f κ. g ;

↳ $\int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_0^{2\pi} f(\kappa x)dx$

$\kappa x = u$

$dx = \frac{1}{\kappa} du$

$x = 0 \to u = 0$

$x = 2\pi \to u = 2\pi\kappa$

άρα $= \frac{1}{\kappa}\int_0^{2\kappa\pi} f(u)du$

$= \frac{1}{\kappa} \cdot \sum_{l=0}^{\kappa-1} \int_{l \cdot 2\pi}^{(l+1) \cdot 2\pi} f(u)du = \frac{1}{\cancel{\kappa}} \cdot \cancel{\kappa} \int_0^{2\pi} f(u)du$

$= \int_0^{2\pi} f(u)du$

γιατί είμαστε σε μία περίοδο κ. έτσι όλα τα ολοκλ. είναι ίσα. Αλλά είναι κ ολοκλ.

iii) Ποια η σχέση των συντελ. Fourier ;

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(kx) e^{-inx} dx \underset{kx=t}{=} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-\frac{int}{k}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \int_{\ell \cdot 2\pi}^{(\ell+1) \cdot 2\pi} f(t) e^{-\frac{int}{k}} dt \quad (1)$$

Εδώ δεν είναι όλα ίσα, γιατί έχω μέσα στο ολοκλ. $e^{-\frac{int}{k}}$ έχει k μέσα

$$\int_{\ell \cdot 2\pi}^{(\ell+1) \cdot 2\pi} f(t) \cdot e^{-\frac{int}{k}} dt = \int_0^{2\pi} f(u) \cdot e^{-\frac{inu}{k}} e^{-\frac{in\ell \cdot 2\pi}{k}} du$$

$t = u + \ell 2\pi$

$dt = du$

$t = \ell \cdot 2\pi \to u = 0$

$t = (\ell+1) \cdot 2\pi \to u = 2\pi$

$f(u + \ell \cdot 2\pi) = f(u)$

άρα η (1) γίνεται:

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} e^{-\frac{in\ell \cdot 2\pi}{k}} \cdot \int_0^{2\pi} f(u) e^{-\frac{inu}{k}} du \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} e^{-\frac{in\ell \cdot 2\pi}{k}} \right) \cdot \int_0^{2\pi} f(u) \cdot e^{-\frac{inu}{k}} du \quad (2)$$

Έχουμε : $n = kq + r$, $0 \le r \le k-1$ οπότε:

$$e^{-in\frac{\ell \cdot 2\pi}{k}} = \cancelto{1}{e^{-i\ell \cdot \frac{2\pi k q}{k}}} \cdot e^{-i\frac{\ell \cdot 2\pi r}{k}} = e^{-ir\frac{\ell \cdot 2\pi}{k}}$$

Θέλουμε να βρούμε $\Sigma = \sum_{\ell=0}^{k-1} e^{-\frac{irn\ell}{k}}$, $g(x) = f(k \cdot x)$

- $r=0 \Leftrightarrow n=qk$ - $\Sigma = k$

$$\downarrow$$

$$\hat{g}(qk) \overset{(2)}{=} \frac{1}{2\pi} \cdot \cancel{\frac{1}{k}} \cdot \cancel{k} \cdot \int_0^{2\pi} f(u) e^{-iqu}\, du$$

$$= \hat{f}(y)$$

- $r \neq 0$: $\Sigma = \sum_{l=0}^{k-1} \left(e^{\frac{-ir\pi}{k}}\right)^l$

$$a = e^{-\frac{ir2\pi}{k}} \neq 1$$

$$1 + a^1 + \cdots + a^{k-1} = \sum_{l=0}^{k-1} a^l = \frac{1-a^k}{1-a}$$

$$= \frac{1 - \left(e^{-\frac{ir2\pi}{k}}\right)^k}{1-a} = 0$$